

*An Original Process for the Last Plastic Hinge  
Identification and the Complete Deformation*

*Definition in the State of Collapse*

# UN PROCEDIMENTO ORIGINALE PER L'INDIVIDUAZIONE DELLA CERNIERA ULTIMA E PER LA DETERMINAZIONE DELLA DEFORMAZIONE COMPLETA ALLO STATO DI COLLASSO

*Roberto Maria De Salvo*

*Salita Melissari, 89124*

*Reggio Calabria, Italia*

*Robertomariadesalvo@libero.it*

## Abstract

In collapse analysis of plane framed structures there are many methods allowing the collapse mechanism to be determined but the position of the last plastic hinge always remains unknown, although its location is essential for the analysis of deformation. The maximum displacement theorem could lead to an incorrect result when some plastic hinges are subsequently unloaded. The aim is to formulate an original method, making it easier to identify the final hinge and consequently providing a more thorough understanding of the deformation. The basic idea arises from a simple consideration: giving a framed structure any method of limit analysis allows the collapse mechanism and the moment distribution to be determined. However the last plastic hinge remains unknown. If one assumes that X is said hinge, then the sign of any plastic moment must agree with the sign of the corresponding plastic hinge rotation. Otherwise the moment is impossible and hence the analysis of deformation must highlight some discrepancy. Such discrepancy can only be between the sign of a plastic moment and the sign of the corresponding rotation for at least one plastic hinge involved in the collapse mechanism. The proposed original method is based on the study of deformation aimed to determine the reference state in which the sign accordance between plastic moments and corresponding hinge rotations occur.

**KEY WORDS:** *Final Hinge, Plastic Hinge, Plastic Moments, Collapse*

## 1. Introduzione

L'individuazione della cerniera plastica ultima consente al progettista di conoscere le deformazioni del sistema, fornendogli gli strumenti idonei alla valutazione della loro entità in rapporto alla esigenza di contenerle entro limiti compatibili con la funzionalità dell'opera.

Nel calcolo a rottura di strutture piane intelaiate, esistono diversi metodi che consentono di pervenire alla conoscenza del meccanismo di collasso, unitamente al relativo moltiplicatore e alla distribuzione dei momenti ma, se si esclude l'impiego della procedura al passo, operativamente onerosa, resta sempre incognita la posizione della cerniera plastica insediatasi per ultima, la cui individuazione è fondamentale ai fini dello studio della deformazione.

Il teorema dello spostamento massimo dà, nel merito, delle indicazioni, ma, a parte la complessità, presenta l'inconveniente di fornire un risultato che può essere errato, nel caso in cui qualche cerniera plastica, formatasi durante la messa in carico, venga poi scaricata e dunque non entri a far parte del meccanismo di collasso.

Obiettivo del presente studio, è la formulazione di un criterio originale, concettualmente ed operativamente semplice, per l'individuazione della cerniera ultima e la contestuale conoscenza completa della deformazione.

L'idea fondante prende le mosse da una considerazione elementare: data una struttura intelaiata di cui  $k$  sia il grado di iperstaticità, si determini con un qualsiasi metodo dell'Analisi Limite il meccanismo di collasso e la distribuzione dei momenti. Però, come detto, non si conosce la cerniera plastica ultima. Supposto che  $X$  sia

effettivamente tale cerniera, allora deve necessariamente esistere concordanza nei versi tra i momenti plastici (conosciuti) e le rotazioni delle corrispondenti cerniere plastiche. Una diversa ipotesi, ovvero che la cerniera ultima sia  $Y$  diversa da  $X$ , rappresenta uno stato impossibile e dunque l'analisi della deformazione deve evidenziare una qualche contraddizione e questa non può che essere una discordanza nei versi (almeno una) tra momenti plastici e corrispondenti rotazioni. Il criterio proposto si basa sullo studio della deformazione finalizzato alla ricerca dello stato in riferimento al quale si verifica la concordanza nei versi, nel senso sopra specificato.

Tale indagine viene condotta attraverso il metodo delle rotazioni applicato nel seguente modo. Si procede ad un primo tentativo, ipotizzando che la cerniera ultima ad insediarsi sia una qualunque delle  $k+1$  che caratterizzano lo stato di crisi. Chiaramente questa cerniera, un istante prima del collasso, non ha ancora iniziato a ruotare. In conseguenza lo schema strutturale che così si ottiene comprende  $k$  cerniere plastiche, ma non quella prescelta come ultima. Le incognite del sistema, ovvero i parametri di deformazione, sono le rotazioni degli estremi delle aste in cui cade una cerniera plastica, le rotazioni di certi nodi e quelle di eventuali cerniere normali e ancora gli spostamenti di alcuni nodi. E' noto il diagramma dei momenti e pertanto sono conosciuti i versi di tutti i momenti plastici. Occorre quindi esprimere tutti i momenti in funzione dei sopra citati parametri di deformazione ed imporre le diverse condizioni di equilibrio. Tra queste figurano quelle che impongono che i momenti nelle  $k$  cerniere plastiche presenti nello schema abbiano i versi di cui al diagramma (conosciuto) dei momenti. Risolvendo il sistema, si ottengono i parametri di deformazione attraverso i quali si può procedere al confronto nei versi tra momenti plastici e corrispondenti rotazioni. Se il risultato di tale operazione è positivo nel senso della concordanza, allora la cerniera inizialmente fissata come ultima è quella reale. In caso contrario occorrerà ripetere la procedura descritta, fissando, come ultima, una cerniera diversa da quella precedente. L'iter di calcolo si arresta allorché la concordanza nei versi risulta verificata per tutte le  $k$  cerniere plastiche.

Un primo vantaggio del criterio proposto è quello di fornire, contestualmente all'individuazione della cerniera ultima, il quadro completo della deformazione senza che sia necessario effettuare altre operazioni; un secondo vantaggio è connesso alla certezza del risultato anche nei casi in cui si verifichi il regresso di qualche cerniera plastica; un ultimo vantaggio riguarda la semplicità dal punto di vista operativo, essendo necessario, ai fini dell'analisi della deformazione, soltanto l'impiego del metodo delle rotazioni.

## 2. La cerniera ultima allo stato di crisi

Si consideri una struttura intelaiata di cui  $k$  sia il grado di iperstaticità. Si supponga di avere determinato il meccanismo di collasso con un qualsiasi metodo dell'analisi limite [teorema statico [1], teorema cinematico [2], ecc...], con esclusione della procedura al passo. Sono noti pertanto il moltiplicatore di collasso, la localizzazione delle cerniere plastiche e la distribuzione dei momenti. Non si conosce però quale, tra le  $k+1$  cerniere plastiche, è quella formata per ultima, aspetto questo essenziale ai fini dello studio della deformazione.

Si supponga infatti di essere in una fase generica del procedimento di carico. Dunque sono noti il numero e la localizzazione delle cerniere plastiche. E' conosciuta altresì la distribuzione dei momenti reali nelle condizioni di carico e di vincolo maturate fino alla fase attuale. Ai fini dello studio della deformazione, si fissa uno schema ausiliario che viene dedotto da quello reale con opportuni adattamenti. Questi consistono nella sostituzione delle cerniere plastiche già formatesi con cerniere normali e nell'inserimento di ulteriori cerniere normali in numero tale da rendere lo schema isostatico [1]. Questa è la struttura ausiliaria sulla quale verrà imposto l'equilibrio attraverso il principio dei lavori virtuali, ai fini dello studio della deformazione. E' ovvio che di tali schemi, in rapporto alla consistenza della struttura ed alla fase presa in esame, ne possono esistere diversi e dunque si è liberi di scegliere quello che si ritiene più conveniente per semplificare al massimo le operazioni connesse all'equazione dei lavori virtuali.

Si supponga, più in particolare, di essere nella fase  $k-1$ , essendo  $k$ , come detto, il grado di iperstaticità del sistema. In tali condizioni, manca ovviamente, al raggiungimento del collasso, la formazione di due cerniere plastiche. Ne segue che, in merito alla scelta dello schema ausiliario, le alternative sono due secondo che, dopo la sostituzione delle  $k-1$  cerniere plastiche già formatesi con cerniere normali, si aggiunga, come ulteriore cerniera normale, l'una o l'altra delle due. Se, infine, si è nella fase  $k$ , mancando al collasso la formazione di una sola cerniera plastica, la scelta dello schema ausiliario è obbligata ed è quella che lascia fuori la cennata cerniera. E quest'ultima non è conosciuta a priori. Donde la necessità inderogabile di individuarla.

## 3. Teorema dello spostamento massimo

Si siano calcolati tutti i valori dello spostamento di un punto supponendo successivamente che ciascuna cerniera plastica si sia formata per ultima. Se nel processo di messa in carico reale nessuna cerniera, una volta formata, si è scaricata, il più grande degli spostamenti calcolati rappresenta lo spostamento corretto. Se una o più



cerniere sono state scaricate, il più grande spostamento calcolato può al contrario essere superiore o inferiore allo spostamento corretto [3].

#### 4. Procedimento proposto per la ricerca della cerniera ultima

Esponiamo qui un criterio, concettualmente semplice, che consente di pervenire alla individuazione della cerniera che nel processo di messa in carico si è formata per ultima.

Supponendo (ciò che non è restrittivo) che si tratti di collasso completo, indichiamo con  $X$  tale cerniera. Palesemente, un istante prima del collasso, la sua rotazione è nulla. Pertanto, la situazione in cui si trova il sistema in tale istante rappresenta lo stato reale, in riferimento al quale i versi delle rotazioni delle  $k$  cerniere plastiche coincidono con i versi dei momenti ad esse associati. Ma la localizzazione di  $X$  non è conosciuta. Si ipotizzi allora che l'ultima cerniera a formarsi sia un'altra  $Y$  diversa da  $X$ , scelta tra le  $k+1$  caratterizzanti il cinematismo di crisi. Ferma restando la distribuzione dei momenti reali a collasso, questo stato è palesemente impossibile. E dunque la configurazione della deformazione del sistema, nel quale la cerniera  $Y$  (un istante prima del collasso) non ruota, deve necessariamente contenere qualche contraddizione e questa, essendo – come detto – la distribuzione dei momenti quella allo stato reale, deve necessariamente consistere in qualche discordanza nei versi tra momenti e rotazioni delle corrispondenti cerniere plastiche.

Più precisamente, considerando la configurazione del sistema, allo stato reale, un istante prima del collasso, ovvero quando la cerniera ultima non ha ancora subito rotazione, deve necessariamente sussistere concordanza nei versi tra momenti e rotazioni delle  $k$  cerniere già formatesi. Dunque la cennata concordanza nei versi è condizione necessaria perché lo stato considerato sia quello reale.

Ma tale concordanza si configura anche come condizione sufficiente. E infatti, se tutti i versi nel senso sopra detto sono concordi, tenuto conto che il diagramma dei momenti è quello effettivo allo stato di collasso, lo schema che ne risulta non può che essere quello reale. Lo strumento più idoneo al fine di procedere al controllo, in merito alla cennata concordanza, è l'analisi del sistema con il metodo delle rotazioni [4], attraverso il quale, essendo nota la distribuzione dei momenti a collasso, è facile determinare le rotazioni delle diverse cerniere plastiche. Dunque, se il confronto, nei versi, tra rotazioni e momenti nelle  $k$  cerniere plastiche dà esito positivo nel senso della concordanza, la cerniera, assunta per ipotesi come ultima, è quella reale. In caso contrario, occorrerà ripetere la procedura, scegliendo, come ultima, un'altra

cerniera diversa dalla precedente. Il procedimento si arresta allorché il confronto dà esito positivo.

Si osservi che così operando non si è costretti in generale ad eseguire  $k+1$  tentativi (come avviene invece nel caso si faccia ricorso al teorema dello spostamento massimo) ma, come detto sopra, la procedura viene sospesa allorché la cerniera ultima viene individuata.

Si osservi ancora che, unitamente alla localizzazione della cerniera ultima, resta completamente definita la deformazione della struttura (rotazioni di tutte le cerniere plastiche e spostamenti) e questo risultato è valido anche nel caso in cui, qualche cerniera, una volta formata nel corso della messa in carico, venga successivamente scaricata e dunque non faccia parte del meccanismo di collasso.

#### 5. Teorema della cerniera ultima

Si può dunque enunciare il seguente teorema:

“Sia data una struttura intelaiata,  $k$  volte iperstatica, di cui sia noto il meccanismo di collasso. Scegliendo come ultima una qualsiasi delle  $k+1$  cerniere plastiche, la condizione necessaria e sufficiente affinché tale configurazione sia quella reale è che sussista, per tutte le  $k$  cerniere plastiche residue, concordanza nei versi tra momenti plastici e rotazioni”.

Lo strumento idoneo per condurre l'indagine sui versi, come spiegato più sopra, è il metodo delle rotazioni.

#### 6. Una applicazione numerica

Al fine di rendere più agevole l'interpretazione della procedura, riteniamo utile studiare in dettaglio un caso particolare ovvero quello del portale semplice riportato in Fig. 1.

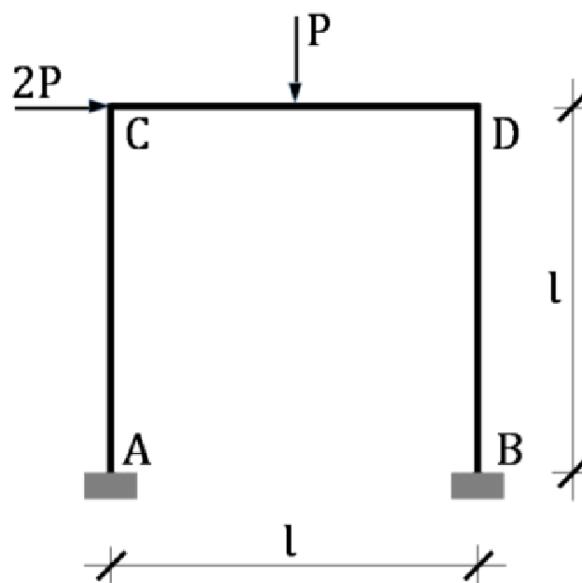


Fig. 1 - Caso studio

Tutte le aste hanno la medesima sezione e dunque lo stesso momento plastico. La loro rigidezza comune, a meno del fattore  $EI$ , vale:  $N=2/l$ .  
 La soluzione del telaio, mediante la procedura al passo, evidenzia che il collasso avviene attraverso un meccanismo di parete e che le cerniere plastiche si formano in successione nei nodi B, A, D, C. Il diagramma dei momenti a collasso è rappresentato in Fig. 2.

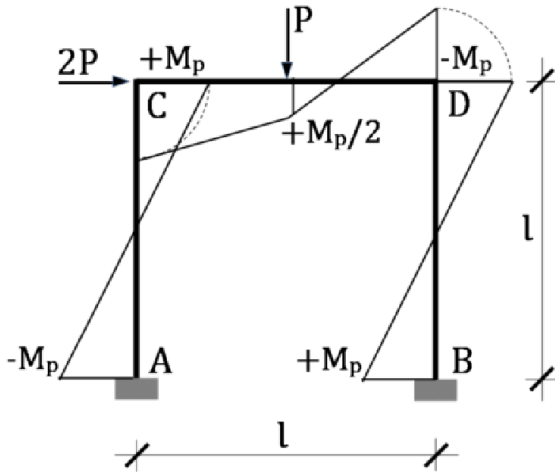


Fig. 2 - Il diagramma dei momenti a collasso

Il corrispondente carico limite risulta  $P=2M_p/l$ . Le fibre tese delle aste sono quelle interne. Prima di entrare nel merito, è opportuno fare una precisazione circa i segni delle rotazioni. Con il metodo delle deformazioni le rotazioni dei nodi, nonché le rotazioni delle sezioni delle aste che ad essi si affacciano, si assumono positive se di verso orario, così come indicato in Fig. 3.a.

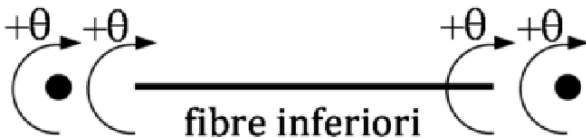


Fig. 3.a - Le rotazioni dei nodi

Le convenzioni adottate nell'analisi limite, invece, sono quelle rappresentate nella Fig. 3.b.

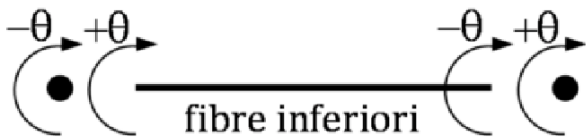


Fig. 3.b - Le convenzioni adottate nell'analisi limite

Ne segue che per adeguare i segni delle rotazioni delle cerniere plastiche, ottenute con il metodo delle deformazioni, alle convenzioni dell'analisi limite, occorre, per il nodo di sinistra, cambiare segno e, per quello di destra, mantenerlo.

Primo caso: cerniera ultima nel nodo A.

Si indicano con  $\varphi_b, \varphi_{ca}, \varphi_{cd}, \varphi_{dc}, \varphi_{db}, \delta$  le rotazioni degli estremi delle aste e lo spostamento orizzontale del trasverso, positivo verso destra. Le prime cinque condizioni devono imporre l'uguaglianza, con opportuni segni, dei momenti nodali ai corrispondenti momenti plastici conosciuti (vedi Fig. 2); la sesta, l'equilibrio alla traslazione orizzontale del trasverso.

Esprimendo i momenti in funzione delle rotazioni, si ottiene il seguente sistema (le rigidezze sono espresse a meno del fattore  $EI$ ):

$$\begin{bmatrix} 2N & 0 & N & 0 & 0 & -3N/l \\ 0 & 2N & 0 & 0 & N & -3N/l \\ N & 0 & 2N & 0 & 0 & -3N/l \\ 0 & 0 & 0 & 2N & N & 0 \\ 0 & N & 0 & N & 4N & -3N/l \\ -3N/l & -3N/l & -3N/l & 0 & -3N/l & 12N/l^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_{ca} \\ \varphi_{cd} \\ \varphi_d \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_p \\ -M_p \\ -M_p \\ 5M_p/4 \\ -M_p/4 \\ 4M_p/l \end{bmatrix}$$

Risolviendo si trova:

$$\begin{aligned}
 \varphi_b &= 0.0000 \text{ Mpl}/EI; \\
 \varphi_{ca} &= 0.0000 \text{ Mpl}/EI; \\
 \varphi_{cd} &= 0.2917 \text{ Mpl}/EI; \\
 \varphi_{dc} &= 0.0417 \text{ Mpl}/EI; \\
 \varphi_{db} &= 0.0000 \text{ Mpl}/EI; \\
 \delta &= -0.1667 \text{ Mpl}^2/EI.
 \end{aligned}$$

Si rilevano le seguenti incongruenze:

nel nodo C il momento plastico è positivo mentre la rotazione della cerniera è negativa, ovvero:

$$\theta_c = \varphi_{ca} - \varphi_{cd} = (0.0000 - 0.2917) \text{ Mpl}/EI = -0.2917 \text{ Mpl}/EI;$$

nel nodo D il momento è negativo mentre la rotazione della cerniera è positiva ovvero:

$$\theta_d = \varphi_{dc} + \varphi_{db} = (0.0417 + 0.0000) \text{ Mpl}/EI = 0.0417 \text{ Mpl}/EI.$$

nel nodo B il momento è positivo mentre la rotazione della cerniera è nulla.

Si conclude che la cerniera in A non è l'ultima a formarsi. Per maggiore chiarezza in Fig. 4 è riportata la situazione dei segni nei nodi esaminati.

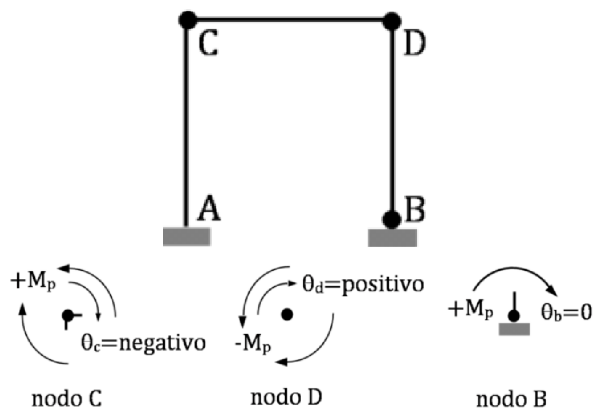


Fig. 4 - Situazione dei segni nei nodi esaminati



*Secondo caso: cerniera ultima nel nodo C.*

Si indicano con  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_{dc}, \varphi_{db}, \delta$  le rotazioni degli estremi delle aste e lo spostamento orizzontale del trasverso, positivo verso destra. La prima condizione, la seconda, la quarta e la quinta devono imporre l'uguaglianza, con opportuni segni, dei momenti nodali ai corrispondenti momenti plastici conosciuti (vedi Fig. 2); la terza, l'equilibrio alla rotazione del nodo C; la sesta l'equilibrio alla traslazione orizzontale del trasverso. Esprimendo i momenti in funzione delle rotazioni, si ottiene il seguente sistema (le rigidezze sono espresse a meno del fattore EI):

$$\begin{bmatrix} 2N & 0 & N & 0 & 0 & -3N/l \\ 0 & 2N & 0 & 0 & N & -3N/l \\ N & 0 & 4N & N & 0 & -3N/l \\ 0 & 0 & N & 2N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 & 2N & -3N/l \\ -3N/l & -3N/l & -3N/l & 0 & -3N/l & 12N/l^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \varphi_{dc} \\ \varphi_{db} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_p \\ -M_p \\ M_p/4 \\ 3M_p/4 \\ -M_p \\ 4M_p/l \end{bmatrix}$$

Risolviendo si trova:

$\varphi_a = 0.2917 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_b = 0.2917 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_c = 0.2917 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_{dc} = 0.0417 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_{db} = 0.2917 \text{ Mpl/EI};$   
 $\delta = 0.4583 \text{ Mpl}^2/\text{EI}.$

Si rileva quanto segue:

nella cerniera in A il momento plastico è negativo e così pure la corrispondente rotazione. Infatti è:

$\theta_a = -0.2917 \text{ Mpl/EI};$

nella cerniera in D il momento plastico è negativo e anche la rotazione risulta negativa. Infatti è:

$\theta_d = \varphi_{dc} - \varphi_{db} = (0.0417 - 0.2917) \text{ Mpl/EI} = -0.2500 \text{ Mpl/EI};$

nella cerniera in B il momento è positivo e così pure la rotazione. Infatti è:

$\theta_b = \varphi_b = 0.2917 \text{ Mpl/EI}.$

Si osservi inoltre che lo spostamento orizzontale  $\delta$  coincide con quello, calcolato a parte, attraverso la procedura al passo. Si conclude che l'ipotesi assunta è corretta e dunque la cerniera nel nodo C è l'ultima a formarsi. Contestualmente è conosciuta la deformazione completa della struttura nell'istante che precede il collasso. In Fig. 5 è riportata la situazione dei segni relativa ai nodi esaminati.

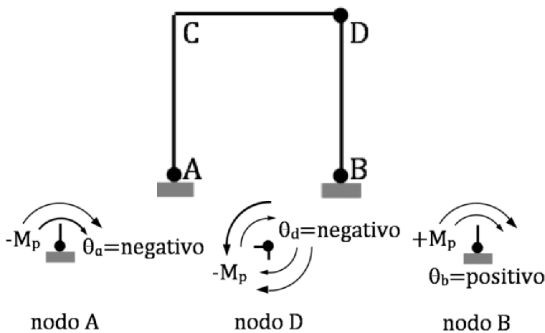


Fig. 5 - Situazione dei segni relativa ai nodi esaminati

In merito alla deformazione risulta:

rotazione della cerniera in A:  $\theta_a = -\varphi_a = -0.2917 \text{ Mpl/EI};$   
 rotazione della cerniera in D:  $\theta_d = \varphi_{dc} - \varphi_{db} = -0.25 \text{ Mpl/EI};$   
 rotazione della cerniera in B:  $\theta_b = \varphi_b = +0.2917 \text{ Mpl/EI};$   
 spostamento della trave:  $\delta = +0.4583 \text{ Mpl}^2/\text{EI}.$

Per completezza, si prendono in considerazione i due casi rimanenti ovvero i casi corrispondenti all'ipotesi che l'ultima cerniera a formarsi sia quella nel nodo D e poi quella nel nodo B.

*Terzo caso: cerniera ultima nel nodo D.*

Si indicano con  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_{ca}, \varphi_{cd}, \varphi_d, \delta$  le rotazioni degli estremi delle aste e lo spostamento orizzontale del trasverso, assunto positivo verso destra. Le prime quattro condizioni devono imporre l'uguaglianza, con opportuni segni, dei momenti nodali ai corrispondenti momenti plastici conosciuti (vedi Fig. 2); la quinta, l'equilibrio alla rotazione del nodo D; la sesta, l'equilibrio alla traslazione orizzontale del trasverso.

Esprimendo i momenti in funzione delle rotazioni, si ottiene il seguente sistema (le rigidezze sono espresse a meno del fattore EI):

$$\begin{bmatrix} 2N & 0 & N & 0 & 0 & -3N/l \\ 0 & 2N & 0 & 0 & N & -3N/l \\ N & 0 & 2N & 0 & 0 & -3N/l \\ 0 & 0 & 0 & 2N & N & 0 \\ 0 & N & 0 & N & 4N & -3N/l \\ -3N/l & -3N/l & -3N/l & 0 & -3N/l & 12N/l^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_{ca} \\ \varphi_{cd} \\ \varphi_d \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_p \\ -M_p \\ -M_p \\ 5M_p/4 \\ -M_p/4 \\ 4M_p/l \end{bmatrix}$$

Risolviendo si trova:

$\varphi_a = 0.0417 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_b = 0.0417 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_{ca} = 0.0417 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_{cd} = 0.2917 \text{ Mpl/EI};$   
 $\varphi_d = 0.0417 \text{ Mpl/EI};$   
 $\delta = 0.2083 \text{ Mpl}^2/\text{EI}.$

Si rileva quanto segue:

nella cerniera in A il momento plastico è negativo e così pure la corrispondente rotazione. Infatti è:

$\theta_a = -\varphi_a = -0.0417 \text{ Mpl/EI};$

nella cerniera in C il momento plastico è positivo ma la rotazione risulta negativa. Infatti è:

$\theta_c = \varphi_{ca} - \varphi_{cd} = (0.0417 - 0.2917) \text{ Mpl/EI} = -0.2500 \text{ Mpl/EI};$

nella cerniera in B il momento è positivo e così pure la rotazione. Infatti è:

$\theta_b = \varphi_b = 0.0417 \text{ Mpl/EI}.$

In conclusione, esiste concordanza nei segni nei nodi A e B ma non nel nodo C. Dunque, come previsto, l'ipotesi che la cerniera ultima si formi nel nodo D è errata.

In Fig. 6 è riportata la situazione dei segni relativa ai nodi esaminati.

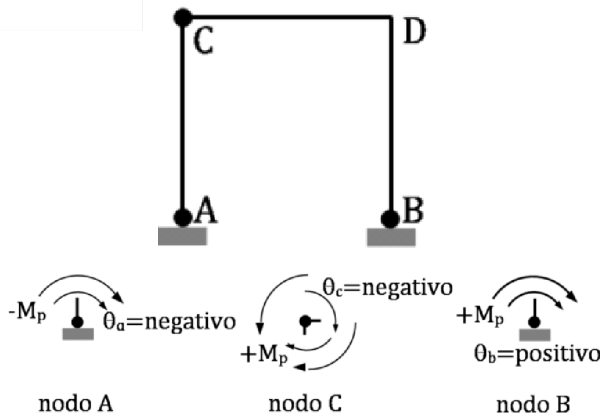


Fig. 6 - Situazione dei segni relativa ai nodi esaminati

Quarto caso: cerniera ultima nel nodo B.

Si indicano con  $\varphi_a, \varphi_{ca}, \varphi_{cd}, \varphi_{dc}, \varphi_{db}, \delta$  le rotazioni degli estremi delle aste e lo spostamento orizzontale del trasverso, positivo verso destra. Le prime cinque condizioni devono imporre l'uguaglianza, con opportuni segni, dei momenti nodali ai corrispondenti momenti plastici conosciuti (vedi Fig. 2); la sesta l'equilibrio alla traslazione orizzontale del trasverso.

Esprimendo i momenti in funzione delle rotazioni, si ottiene il seguente sistema (le rigidezze sono espresse a meno del fattore EI):

$$\begin{bmatrix} 2N & N & 0 & 0 & 0 & -3N/l \\ N & 2N & 0 & 0 & 0 & -3N/l \\ 0 & 0 & 2N & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2N & -3N/l \\ -3N/l & -3N/l & 0 & 0 & -3N/l & 12N/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_{ca} \\ \varphi_{cd} \\ \varphi_{dc} \\ \varphi_{db} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_p \\ -M_p \\ 5M_p/4 \\ 3M_p/4 \\ -M_p \\ 4M_p/l \end{bmatrix}$$

Risolviendo si trova:

$$\begin{aligned}
 \varphi_a &= 0.0000 Mpl/EI; \\
 \varphi_{ca} &= 0.0000 Mpl/EI; \\
 \varphi_{cd} &= 0.2917 Mpl/EI; \\
 \varphi_{dc} &= 0.0417 Mpl/EI; \\
 \varphi_{db} &= 0.0000 Mpl/EI; \\
 \delta &= 0.1667 Mpl^2/EI.
 \end{aligned}$$

Si rileva quanto segue:

nella cerniera in A il momento plastico è negativo mentre la rotazione è nulla. Infatti è:

$$\theta_a = -\varphi_a = 0.0000 Mpl/EI;$$

nella cerniera in C il momento plastico è positivo ma la rotazione risulta negativa. Infatti è:

$$\theta_c = \varphi_{ca} - \varphi_{cd} = (0.0000 - 0.2917) Mpl/EI = -0.2917 Mpl/EI;$$

nella cerniera in D il momento plastico è negativo mentre la rotazione è positiva.

Infatti è:

$$\theta_d = \varphi_{dc} - \varphi_{db} = (0.0417 - 0.0000) Mpl/EI = 0.0417 Mpl/EI;$$

In conclusione, esiste in tutti i nodi disconcordanza nei

segni tra momenti plastici e rotazioni. Dunque, l'ipotesi che la cerniera ultima si formi nel nodo B è errata.

In Fig. 7 è riportata la situazione dei segni relativa ai nodi esaminati.

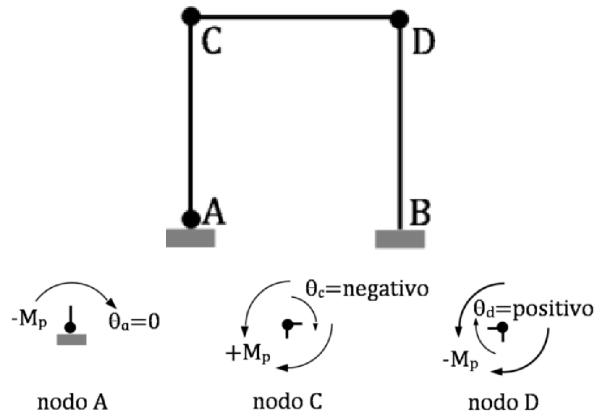


Fig. 7 - Situazione dei segni relativa ai nodi esaminati

E' stato anche studiato il caso di un telaio doppio incastrato con grado di iperstaticità pari a sei. La procedura al passo ha evidenziato che, dopo la quinta cerniera plastica, le due rimanenti si formano simultaneamente. Si è applicato il procedimento qui sviluppato fissando, come ultima, una volta l'una e una volta l'altra delle due. In entrambe i casi si è verificata la puntuale concordanza nei segni tra momenti plastici e rotazioni delle corrispondenti cerniere, oltre che lo stesso quadro deformativo. Inoltre, considerando come ultima l'una delle due cerniere, la rotazione dell'altra è risultata nulla e viceversa. E' stato ulteriormente analizzato il caso con esclusione dallo schema di entrambe le cerniere, ottenendo ancora una volta il medesimo risultato.

## 7. Confronto con il criterio dello spostamento massimo

E' opportuno mostrare la differenza, in tema di laboriosità di calcolo, tra il criterio del massimo spostamento e il procedimento qui esposto e ciò a prescindere dalla incertezza nel risultato connessa alla eventualità che nel corso della messa in carico qualche cerniera venga scaricata.

Ai fini della ricerca della cerniera ultima con il criterio del massimo spostamento [par. 3] occorre eseguire  $k+1$  tentativi ovvero calcolare lo spostamento di un punto, ipotizzando volta per volta che ciascuna delle  $k+1$  cerniere plastiche sia quella formatasi per ultima. La cerniera ultima sarà quella corrispondente allo spostamento massimo.

Facendo riferimento al telaio semplice, trattato al precedente paragrafo, occorre analizzare quattro casi secondo che si consideri come ultima ciascuna delle



cerniere in A, C, D, B relative allo stato di collasso. Poiché la struttura è soggetta a carichi concentrati, in sede di applicazione del principio dei lavori virtuali finalizzato al calcolo dello spostamento, conviene adottare la nota relazione:

dove:

$$\delta = \frac{\alpha}{6EI} [M_1(2m_1+m_2)+M_2(m_1+2m_2)], \quad (*)$$

$\alpha$  è la lunghezza del tratto di trave o la luce dell'intera trave;

$M_1$  e  $M_2$  sono i momenti reali agli estremi allo stato di collasso;

$m_1$  e  $m_2$  sono i momenti fittizi agli estremi prodotti dalla forza unitaria applicata nel punto (e nella direzione) del quale si vuole conoscere lo spostamento [1].

Ciò premesso, calcoliamo lo spostamento orizzontale del trasverso C-D nei quattro casi sopra citati.

Il diagramma dei momenti allo stato di collasso è rappresentato in Fig. 2.

7.1. Cerniera ultima nel nodo A

Momento fittizio in A:  $m=-1 * l$

In base alla [\*] risulta (vedi Fig. 8):

$$\delta_1 = \frac{l}{6EI} [-M_p(-2l)+M_p(-l)] = \frac{M_p l^2}{6EI} = 0.1667 \frac{M_p l^2}{6EI}.$$

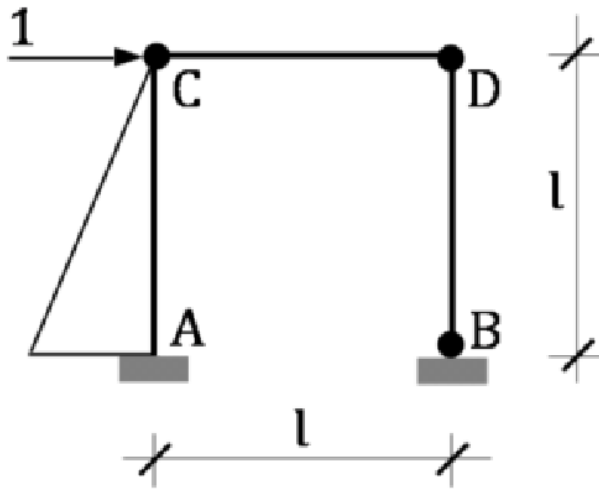


Fig. 8 - Momento fittizio in A

7.2. Cerniera ultima nel nodo C

Momento fittizio in C:  $m=+1 * l$

In base alla [\*] risulta (vedi Fig. 9):

$$\delta_2 = \frac{l}{6EI} [-M_p(l)+M_p(2l)] + \frac{l}{12EI} [M_p(2l+\frac{l}{2}) + \frac{M_p}{2}(1+\frac{2l}{2})] + \frac{l}{12EI} [\frac{M_p}{2}(\frac{2l}{2}) - M_p(\frac{l}{2})] = \frac{11 M_p l^2}{24 EI} = 0.4583 \frac{M_p l^2}{EI}.$$

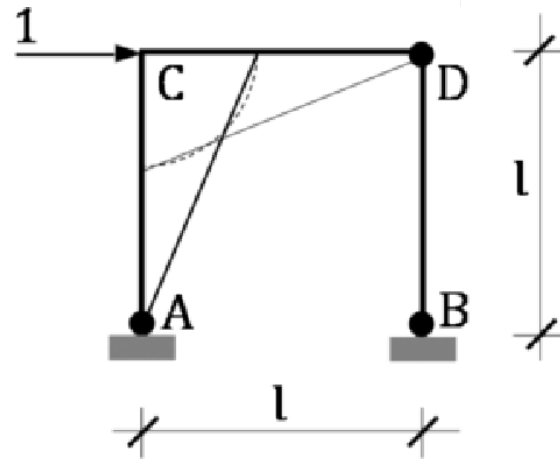


Fig. 9 - Momento fittizio in C

7.3. Cerniera ultima nel nodo D

Momento fittizio in D:  $m=-1 * l$

In base alla [\*] risulta (vedi Fig. 10):

$$\delta_3 = \frac{l}{12EI} [M_p(-\frac{l}{2}) + \frac{M_p}{2}(-2\frac{l}{2})] + \frac{l}{12EI} [\frac{M_p}{2}(-2\frac{l}{2}-l) - M_p(-\frac{l}{2}-2l)] + \frac{l}{6EI} [M_p(-l) - M_p(-2l)] = \frac{5 M_p l^2}{24 EI} = 0.2083 \frac{M_p l^2}{EI}.$$

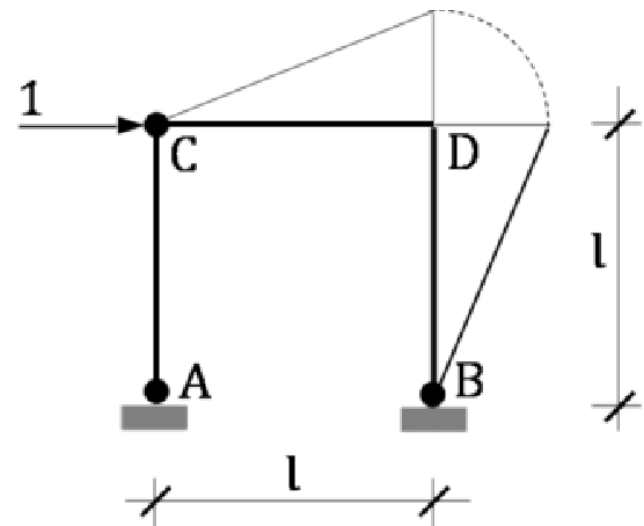


Fig. 10 - Momento fittizio in D

7.4. Cerniera ultima nel nodo B

Momento fittizio in B:  $m=+1 * l$

In base alla [\*] risulta (vedi Fig. 11):

$$\delta_4 = \frac{l}{6EI} [M_p(2l) - M_p(l)] = \frac{M_p l^2}{6EI} = 0.1667 \frac{M_p l^2}{EI}.$$

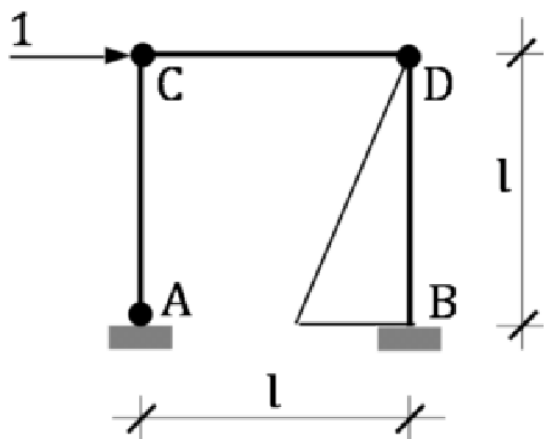


Fig. 11 - Momento fittizio in B

In sintesi gli spostamenti del trasverso C-D sopra calcolati risultano:

nell'ipotesi di cerniera ultima in A:  $\delta_1 = 0.1667M_p l^2/EI$

nell'ipotesi di cerniera ultima in C:  $\delta_1 = 0.4583M_p l^2/EI$

nell'ipotesi di cerniera ultima in D:  $\delta_1 = 0.2083M_p l^2/EI$

nell'ipotesi di cerniera ultima in B:  $\delta_1 = 0.1667M_p l^2/EI$

Essendo  $\delta_2 = 0.4583M_p l^2/EI$  il massimo tra i quattro spostamenti, si conclude che l'ultima cerniera è quella relativa al nodo C.

A questo punto, conoscendo la cerniera ultima, al fine di determinare le rotazioni delle residue tre cerniere plastiche, allo stato di collasso, occorre applicare il principio dei lavori virtuali ancora tre volte.

Con il criterio esposto, invece, è sufficiente operare due tentativi, al secondo dei quali restano conosciuti, ad un tempo, sia la cerniera ultima sia il quadro completo della deformazione. In generale, dunque, secondo il teorema del massimo spostamento, nel caso di una struttura  $k$  volte iperstatica, supposto si tratti di collasso completo, occorre eseguire  $k+1$  operazioni al fine di individuare la cerniera ultima e successivamente ancora  $k$  operazioni per il calcolo delle rotazioni delle cerniere plastiche un istante prima del collasso.

Occorre, inoltre, eseguire altre operazioni per il calcolo degli spostamenti.

### 8. Il sistema risolutivo

L'analisi della deformazione, ai fini della ricerca della cerniera ultima, può essere condotta con una procedura che rende particolarmente semplice il passaggio tra un tentativo e il successivo. Se ne dà di seguito un rapido cenno. In particolare, il metodo delle deformazioni viene applicato alla struttura allo stato di collasso incipiente ovvero nell'istante in cui, essendosi formata l'ultima cerniera plastica, il loro numero totale risulta pari a  $k+1$ .

Chiaramente, poiché in tal modo si opera su uno schema labile, la matrice dei coefficienti del sistema è a determinante nullo. Le ipotesi, circa la cerniera ultima a formarsi, devono essere ancora singolarmente imposte.

A tal fine: se si ipotizza che la cerniera ultima sia una di quelle appartenenti ad un nodo vincolato al suolo ad incastro, occorre imporre, nel sistema di cui sopra, che la relativa rotazione sia nulla ovvero annullare la colonna dei coefficienti relativa alla citata incognita e nello stesso tempo eliminare la corrispondente equazione di equilibrio; supponendo invece che la cerniera ultima sia tra quelle ricadenti all'estremo di un'asta convergente in un nodo interno, occorre imporre l'uguaglianza della sua rotazione alla rotazione del nodo, ciò che equivale a sommare i coefficienti delle due corrispondenti equazioni di equilibrio e contestualmente i coefficienti delle due colonne relative alle anzidette rotazioni.

Così procedendo, ogni volta che viene effettuato un tentativo, il relativo sistema viene dedotto direttamente da quello generale, riferito alla struttura allo stato di collasso incipiente, evitando di dovere, caso per caso, entrare nel merito dei criteri di formazione delle singole equazioni. Inoltre, le cennate semplici operazioni possono essere eseguite direttamente oppure, operando attraverso programma automatico di calcolo, mediante opportune matrici di indici.

### 9. Conclusioni

Sulla base di quanto sopra, segue:

- 1 il procedimento esposto conduce ad un risultato certo, ovvero, indipendente dalla eventuale formazione di cerniere plastiche che, venendo successivamente scaricate, non faranno più parte del meccanismo di collasso. Ciò, in quanto, tale procedimento dipende solo da condizioni di equilibrio e di congruenza e non da considerazioni di carattere energetico;
- 2 le prove da effettuare sono in generale minori di  $k+1$  (essendo  $k$  il grado di iperstaticità della struttura), in relazione al fatto che, la procedura si arresta nel momento in cui viene individuata la cerniera ultima;
- 3 allorché, viene effettuato un tentativo il cui risultato dà esito negativo, la costruzione del sistema di equazioni riferito alla prova successiva, in base a quanto esposto al par. 8, è ricondotta alla massima semplicità e non richiede che si entri nel merito di modifiche da apportare al sistema utilizzato nella prova precedente;
- 4 una volta che sia stata individuata la cerniera ultima, resta simultaneamente conosciuto lo stato completo di deformazione della struttura (rotazioni di tutte le cerniere plastiche e spostamenti)





nell'istante che precede il collasso, senza che sia necessario effettuare ulteriori operazioni. Infatti tali elementi si ottengono direttamente dalla soluzione del sistema di equazioni impiegato.

### Bibliografia

- [1] Massonnet M., Save M., "*Calcolo a rottura delle strutture*", Bologna, 1967, pp. 49, 176, 177
- [2] Dell'Acqua L. C., "*Meccanica delle Strutture La valutazione della capacità portante*", Vol. 3, The McGraw-Hill Companies, 2002/2003, p. 38
- [3] Massonnet M., Save M., "*Calcolo plastico a rottura delle costruzioni*", Maggioli Editore, 2008, p. 243
- [4] De Salvo R. M., "*Lezioni di Scienza delle Costruzioni. Il metodo delle deformazioni nelle strutture piane*", Editore Laruffa, 1993